Probabilités et statistiques
variable aléatoires et loi usuelles

Variable aléatoire

variable numérique qui varie selon le resultat une expérience **aléatoire**

X désigne la variable aléatoire et x Les valeurs possible de X

définition

- Soit (Ω,T ,P) un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire une application de Ω dans R :
- X : Ω→ R
- ω → x=X(ω)∈Dx/Dx son domaine de définition

Variable aléatoire discrète

- Dx sous ensemble discret de R(dénombrable, si Ω l'est aussi)

Variable aléatoire continue

- Dx sous ensemble continue de de R(toutes les valeurs d'un intervalle)

loi d'une variable aléatoire

A un événement non élémentaire

- sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies :
- X(Ω) devient un ensemble probabilisé si :
- pour chaque xi, il y a P(X = xi)= pi
- Si X(ωi)= x ,Pi=P({ωi}),Si X(A)= xi,pi=P(A)

Caractéristique:
$E(kX) = kE(X)$
$E(X + k) = E(X) + k$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Variable aléatoire discrète

Espérance mathématique

- définit la moyenne **théorique ou vraie**, d'une variable X par
- $\mu_x = E(X) = \sum \mathcal{X}_i\, p_i = \mathcal{X}_1 p_1 + \mathcal{X}_2\, p_2 + \ldots + \mathcal{X}_n\, p_n$
- μ_x peut être notée $\boldsymbol{\mu}$ s'il n'y a pas de confusion possible.
- Elle traduit la tendance centrale de la variable aléatoire.

Variance

- La variance (vraie ou théorique) de X, notée var(X) ou $\delta_x{}^2$ qui traduit la dispersion autour de l'espérance, est définie par :
- $\delta_x{}^2 = var(X) = E((X - \mu_x)^2)$ / $\mu_x = E(X)$

écart-type

- noté $\sigma(X)$ ou δ_x est défini par $\sigma(X) = \delta_x = \sqrt{var(X)}$
- δ_x est noté σ s'il n'y a pas de confusion possible.

C'est la probabilité cumulée

Définit dans la littérature anglo-saxonne

Fonction de répartition

- Soit X une v.a sur l'espace probabilisé (Ω, T, P) la fonction de répartition est définie par :
- $F : R \rightarrow [0,1]$
- $\mathcal{X} \rightarrow P(X \leq \mathcal{X})$ / $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\mathcal{X} \leq \mathcal{X}_i} P(X = \mathcal{X}_i) = \sum_{\mathcal{X} \leq \mathcal{X}_i} p_i$

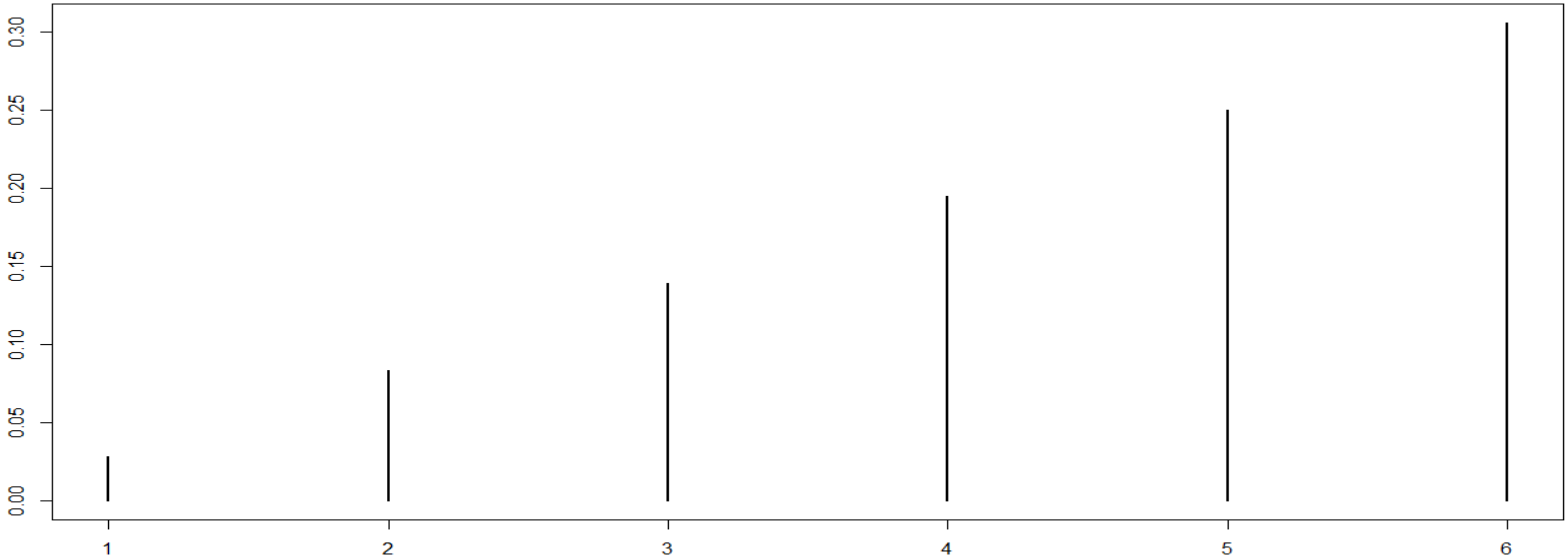
Exemple1

- soit l'expérience :jeter deux dés parfaitement équilibrés. L'espace fondamental $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 6)\}$
- C'est un espace équiprobable. soit la variable aléatoire définie comme suit : soit $\forall\ r = (a, b) \in \Omega$;
- on pose $X(r) = X(a, b) = \max(a, b)$ =>X variable aléatoire sur Ω /

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et la loi de probabilité représenter :

x_i	1	2	3	4	5	6
Pi	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Distribution de la variable aléatoire



- Espérance mathématique:

$E(X) = 1/36 + 6/36 + 15/36 + 28/36 + 45/36 + 66/36 = 161/36 \approx 4{,}47$

Est monotone ,croissante et continue à gauche

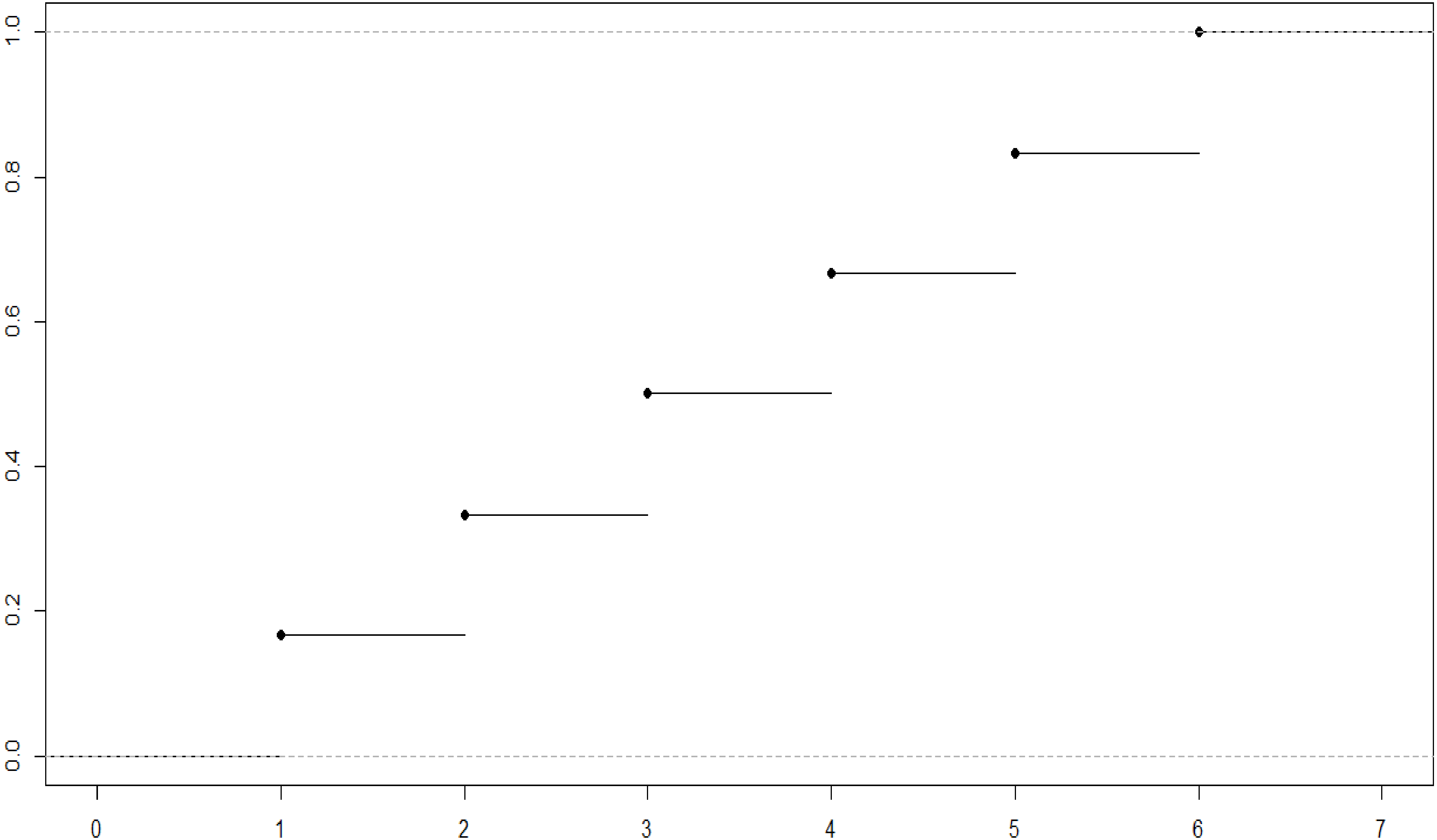
Fonction de répartition

- Soit X une v.a sur l'espace probabilisé (Ω,T ,P) la fonction de répartition est définie par :
- $F : R \rightarrow [0,1]$
- $\quad x \rightarrow P\ (X \leq x)$
- $F(x) = \sum P\ (X = x) = \sum_{x \leq x_i} pi$

$\forall\ x < x_1, F(x)=0$
$\forall\ x > x_n,\ F(x)=1$
$P(\{X>x\})=1-F(x)$
$P(\{x \leq X \leq y\}) = F(y) - F(x)$

t	]-∞,1[	]1,2[	]2,3[	]3,4[	]4,5[	]5,6[	]6,+∞[
F(t)	0	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1

Fonction de répartition



Lois de probabilités usuelles

lois discrètes

Loi de Bernouli

- considère une expérience n'ayant que deux résultats possibles, par exemple:Ω ={ succès ,échec}c .X ({succès})=1 et X ({échec})=0
- X est dite **variable de Bernoulli**

La Loi de probabilité

- La distribution de X : Si $P(X = 1) = \Pi$ alors $P(X = 0) = 1 - \Pi$

Espérance de X

- $\boldsymbol{\mu_x = \Pi}$

Variance de X

- $\delta^2{}_x \; =(\Pi- \Pi^2)= \Pi(1- \Pi)$

Loi Binomiale

- Soient les épreuves **répétées** et **indépendantes** d'une même expérience de Bernoulli, à cette expérience multiple on associe X v.a qui mesure le nombre de succès obtenues:Ω={sucées, échec}
- X: $\Omega x \Omega x..x\Omega$->R
- (succès, échec, succès..)->X({(succès, échec, succès..)})=K
- K le nombre de succès parmi n essai ,X est dite **variable binomiale**

La Loi de probabilité

- la probabilité d'avoir k succès lors de n épreuves répétées est :
- $P(X = k \text{ pour n essais}) = C_n^k \; \Pi^k \; (1-\Pi)^{n-k} = n!/(k!(n-k)!) * \Pi^k (1-\Pi)^{n-k}$

Espérance de X

- $\boldsymbol{\mu_x = n\Pi}$

Variance de X

- $\delta^2{}_x \; = n\Pi(1- \Pi)$

Exemple1

- On jette 6 fois une pièce bien équilibrée ; on suppose que face est un succès. On a donc
- $\Pi = 1/2$ et $n = 6$
- a. Probabilité que l'on ait exactement 2 faces
- P(2faces parmi 6jets)=6 !/(2 !4 !) $*(1/2)^2*(1/2)^4=15/64$
- P(4faces au moins parmi 6jets)=p4+p5+p6

  =15/64+6/64+1/64=11/32

EXERCICE1

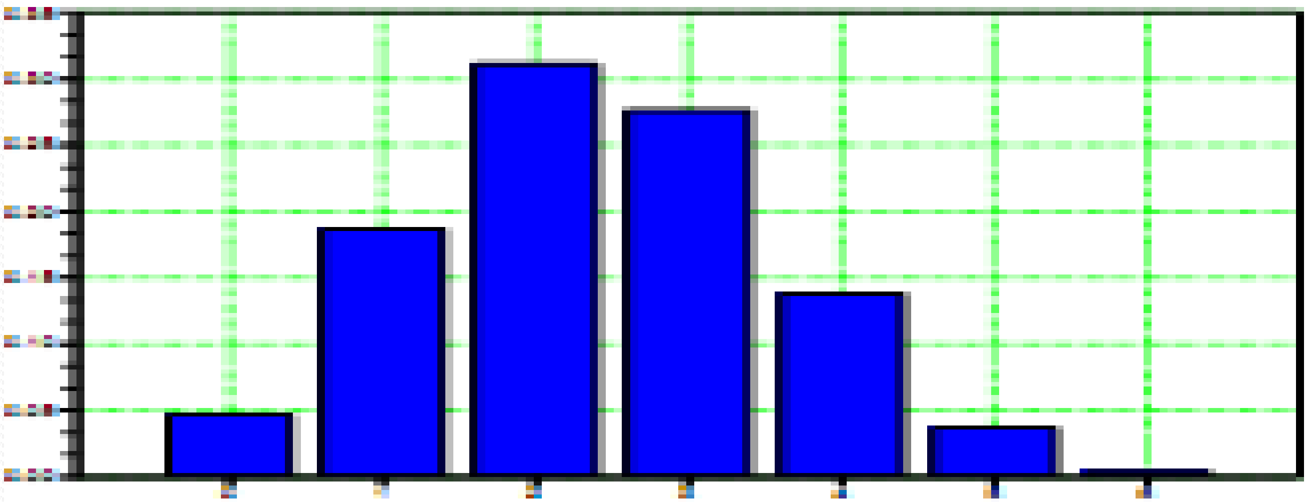
- on considère l’expérience « tirer successivement et avec remise 6 boules parmi 4 rouges et 6 bleus »étudier la v.a. définie par « nombre de boules rouges obtenues »

solution

- tirer une boule est une expérience de Bernoulli de probabilité de succès (« obtenir une boule rouge »)
-
- Cette expérience est répétée $n = 6$ fois de manière indépendante (car il y a remise de la boule tirée à chaque fois) donc $X \sim B(n = 6; p = 0.4)$. On en déduit directement la loi de X :
- $P(X=k)=n!/(k!(n-k)!) * \Pi^k (1-\Pi)^{n-k}$

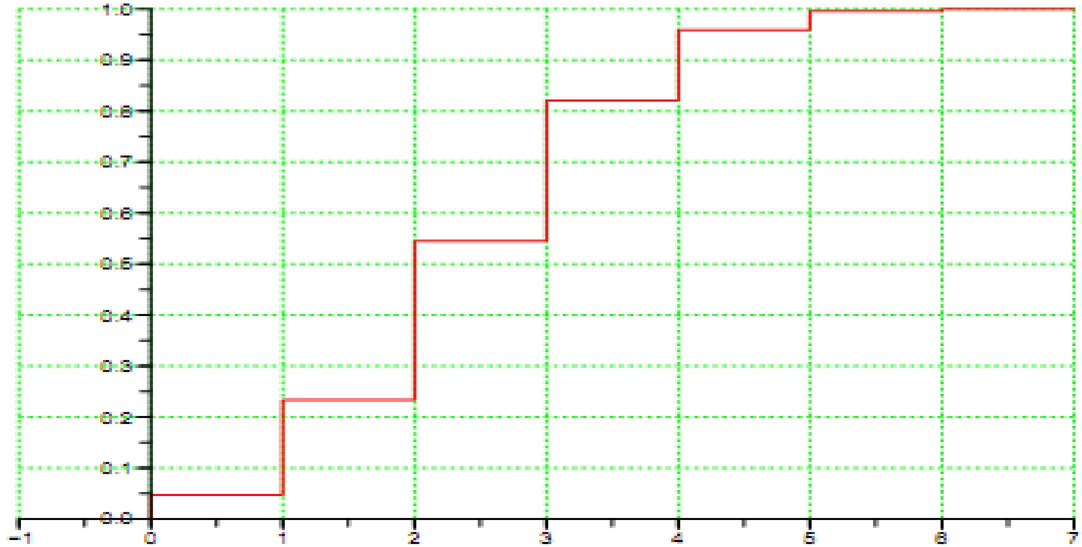
k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0.047	0.187	0.311	0.276	0.138	0.037	0.004

et son diagramme en bâton



ce qui donne pour la fonction de répartition :

$t \in I$	$]-\infty,0[$	$[0,1[$	$[1,2[$	$[2,3[$	$[3,4[$	$[4,5[$	$[5,6[$	$[6,+\infty[$
$F(t)$	0	0.047	0.233	0.544	0.821	0.959	0.996	1



- $E(X) = 0 \times 0.046656 + 1 \times 0.186624 + 2 \times 0.31104 + 3 \times 0.27648$
- $\mathrm{var}(X) = 0^2 \times 0.046656 + 1^2 \times 0.186624 + 2^2 \times 0.31104 + 3^2 \times 0.27648$

Table loi binomiale

TABLE 1-1 — **L O I   B I N O M I A L E**

Probabilités individuelles $Pr(k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$

n	p / k	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	**0,10**
5	0	0,95099	0,90392	0,85873	0,81537	0,77378	0,73390	0,69569	0,65908	0,62403	0,59049
	1	0,04803	0,09224	0,13279	0,16987	0,20363	0,23422	0,26182	0,28656	0,30859	0,32805
	2	0,00097	0,00376	0,00821	0,01416	0,02143	0,02990	0,03941	0,04984	0,06104	0,07290
	3	0,00001	0,00008	0,00025	0,00059	0,00113	0,00191	0,00297	0,00433	0,00604	0,00810
	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00003	0,00006	0,00011	0,00019	0,00030	0,00045
	5				0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00001
10	0	0,90438	0,81707	0,73742	0,66483	0,59874	0,53862	0,48398	0,43439	0,38942	0,34868
	1	0,09135	0,16675	0,22807	0,27701	0,31512	0,34380	0,36429	0,37773	0,38514	0,38742
	2	0,00415	0,01531	0,03174	0,05194	0,07463	0,09875	0,12339	0,14781	0,17141	0,19371
	3	0,00011	0,00083	0,00262	0,00577	0,01048	0,01681	0,02477	0,03427	0,04521	0,05740
	4	0,00000	0,00003	0,00014	0,00042	0,00096	0,00188	0,00326	0,00522	0,00782	0,01116
	5		0,00000	0,00001	0,00002	0,00006	0,00014	0,00029	0,00054	0,00093	0,00149
	6			0,00000	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00008	0,00014
	7						0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001

Si X~ $\mathscr{B}$(n=5;p=0.01) , P(X=3) =0.00001

Loi de Poisson

- est la loi du nombre d'événements observés pendant une période de temps donnée dans le cas où ces **événements** sont **indépendants et faiblement probables**
- Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'apparitions indépendantes d'un événement faiblement probable dans une population infinie.

La Loi de probabilité

- $P(X = k) = e^{-\lambda} (\lambda^k / k!)$
- Le paramètre λ, est un nombre réel strictement positif, k=0, 1, 2, etc. Cependant, lorsque k est suffisamment grand, sa probabilité devient extrêmement faible.

Espérance de X

- $\boldsymbol{\mu_x} = \lambda$

Variance de X

- $\delta^2_x = \lambda$
- Si deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 sont distribuées selon des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, alors la variable X_1+X_2 est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Loi de Poisson&loi binomiale

- Si une variable aléatoire $X \sim \mathscr{B}(n; \Pi)$, si Π est petit ($< 0{,}1$) et

n assez grand (> 50), la loi binomiale peut être approximée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n\,\Pi$.

- si X est distribuée selon une loi binomiale=>$X<n$, alors que l'approximation par la loi de Poisson autorise des valeurs supérieures.

- le calcul fournit des probabilités très faibles pour ces valeurs aberrantes.

Table loi de poisson

TABLE 3-1 — **L O I   D E   P O I S S O N**

Probabilités individuelles $Pr(k) = \exp(-\lambda)\, \lambda^k / k!$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	$\boxed{0,00109}$	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
0	0,36788	0,22313	0,13534	0,08208	0,04979	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674
1	0,36788	0,33470	0,27067	0,20521	0,14936	0,10569	0,07326	0,04999	0,03369
2	0,18394	0,25102	0,27067	0,25652	0,22404	0,18496	0,14653	0,11248	0,08422
3	0,06131	0,12551	0,18045	0,21376	0,22404	0,21579	0,19537	0,16872	0,14037
4	0,01533	0,04707	0,09022	0,13360	0,16803	0,18881	0,19537	0,18981	0,17547
5	0,00307	0,01412	0,03609	0,06680	0,10082	0,13217	0,15629	0,17083	0,17547
6	0,00051	0,00353	0,01203	0,02783	0,05041	0,07710	0,10420	0,12812	0,14622
7	0,00007	0,00076	0,00344	0,00994	0,02160	0,03855	0,05954	0,08236	0,10444
8	0,00001	0,00014	0,00086	0,00311	0,00810	0,01687	0,02977	0,04633	0,06528
9	0,00000	0,00002	0,00019	0,00086	0,00270	0,00656	0,01323	0,02316	0,03627
10		0,00000	0,00004	0,00022	0,00081	0,00230	0,00529	0,01042	0,01813
11			0,00001	0,00005	0,00022	0,00073	0,00192	0,00426	0,00824
12			0,00000	0,00001	0,00006	0,00021	0,00064	0,00160	0,00343
13				0,00000	0,00001	0,00006	0,00020	0,00055	0,00132
14					0,00000	0,00001	0,00006	0,00018	0,00047
15						0,00000	0,00002	0,00005	0,00016
16							0,00000	0,00002	0,00005

$X \sim \mathscr{P}(\lambda=0.2), P(k=3)=$

Variable aléatoire continue

Fonction de densité

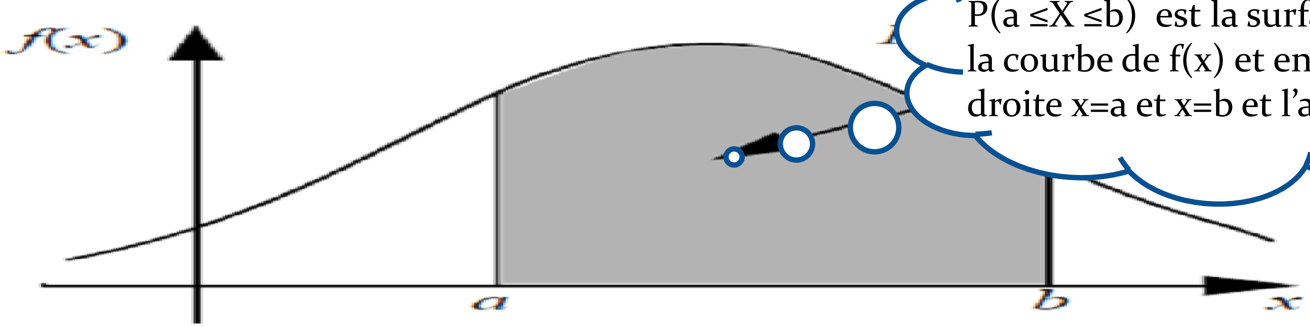
- Est la première dérivée de la fonction de répartition si elle est dérivable: f(x)=d F(x)/dx (si la dérivée existe).
- où f est une fonction continue, positive sur X(Ω) telle que
- $\int_{X(\Omega)} f(x)dx = 1$

Si la loi de probabilité est la notion centrale pour les v.a.d, la fonction de densité l'est pour v.a.c

la loi de probabilité

- loi de distribution de X, à l'aide de f(x), appelée **densité de probabilité** de X, telle que :
- $\int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$

Si f est donnée, la probabilité P(a ≤X ≤b) est la surface sous la courbe de f(x) et entre les droite x=a et x=b et l'axe des x.



Exemple2

- Soit une fonction :
- $\quad (3-x)/8 \quad$ si $-1 \leq x \leq 3$
- $f(x) = \begin{cases} (3-x)/8 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\quad 0$ sinon
- Vérifier que qu'il s'agit d'une fonction de densité de probabilité:

$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3+1 \geq 3-x \geq 3-3 \Rightarrow 4/8 \geq (3-x)/8 \geq 0/8$

$\Rightarrow 0.5 \geq 3-x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ positive

$F(x) = \int_{\infty} (3-x)/8 = [\, 3*x - x^2/2 \,]_{-1}^{3}/8$

$= (3*3-3^2/2 - (3*(-1)-(-1)^2/2))/8 = (9-9/2+3+1/2)/8$

$= (12-4)/8 = 1$

Le passage du discret au continu transforme $\sum$ en $\int$ et pi en f(x)dx.

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{\Re} f(x)dx = 1$
- $\mu_x = E(X) = \int_{\Re} xf(x)dx$
- $\delta^2_x = var(X) = \int_{\Re} (x - E(X))^2 f(x)dx$
- $\delta_x = \sqrt{var(X)}$
- $F(X) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

la fonction de répartition

- fonction monotone croissante et **continue**
- limit F(x)=0 ,pour x –> -∞
  limit F(x)=1 , pour x –> +∞
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Loi Normale

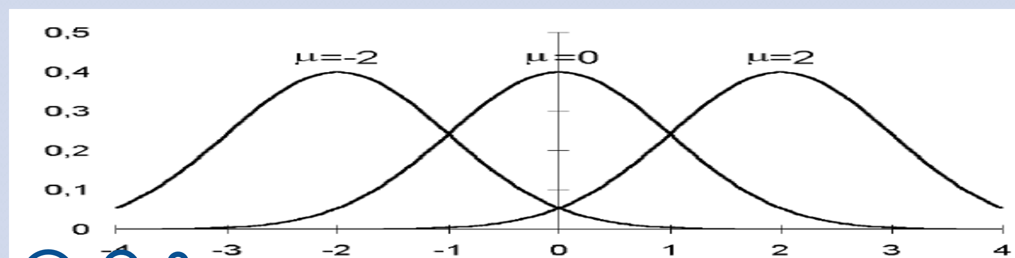
- Une variable aléatoire réelle X, prenant ses valeurs dans R, suit une loi de Laplace-Gauss ou loi normale, de paramètres μ et σ, On la note $\mathscr{N}(\mu;\sigma 2)$.
- Le paramètre μ peut être quelconque mais σ est positif.

La Loi de probabilité (Fonction de densité)

- sa densité de probabilité est donnée par :
- $f(x;\mu,\sigma) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi}) * e^{-1/2*((x-\mu)\wedge 2/\sigma 2)} \Rightarrow$
- **Fonction de répartition :** $P(X<a) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{a} e^{-1/2*((x-\mu)\wedge 2/\sigma 2)}\, dx$

Espérance de X

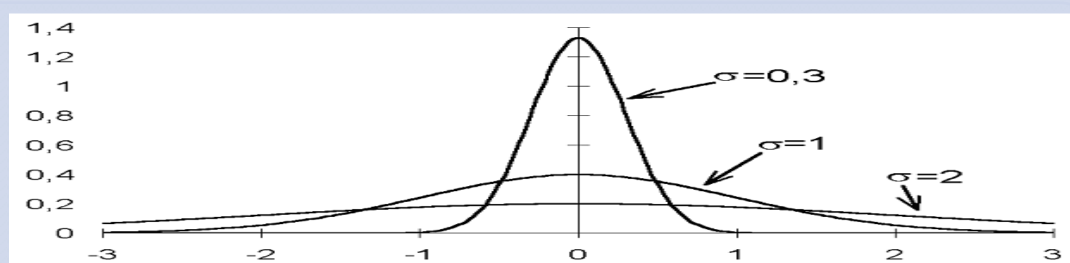
- **μ**



Allure de la courbe : est symétrique par rapport à la droite d'abscisse x= μ, souvent appelée « **courbe en cloche** ».

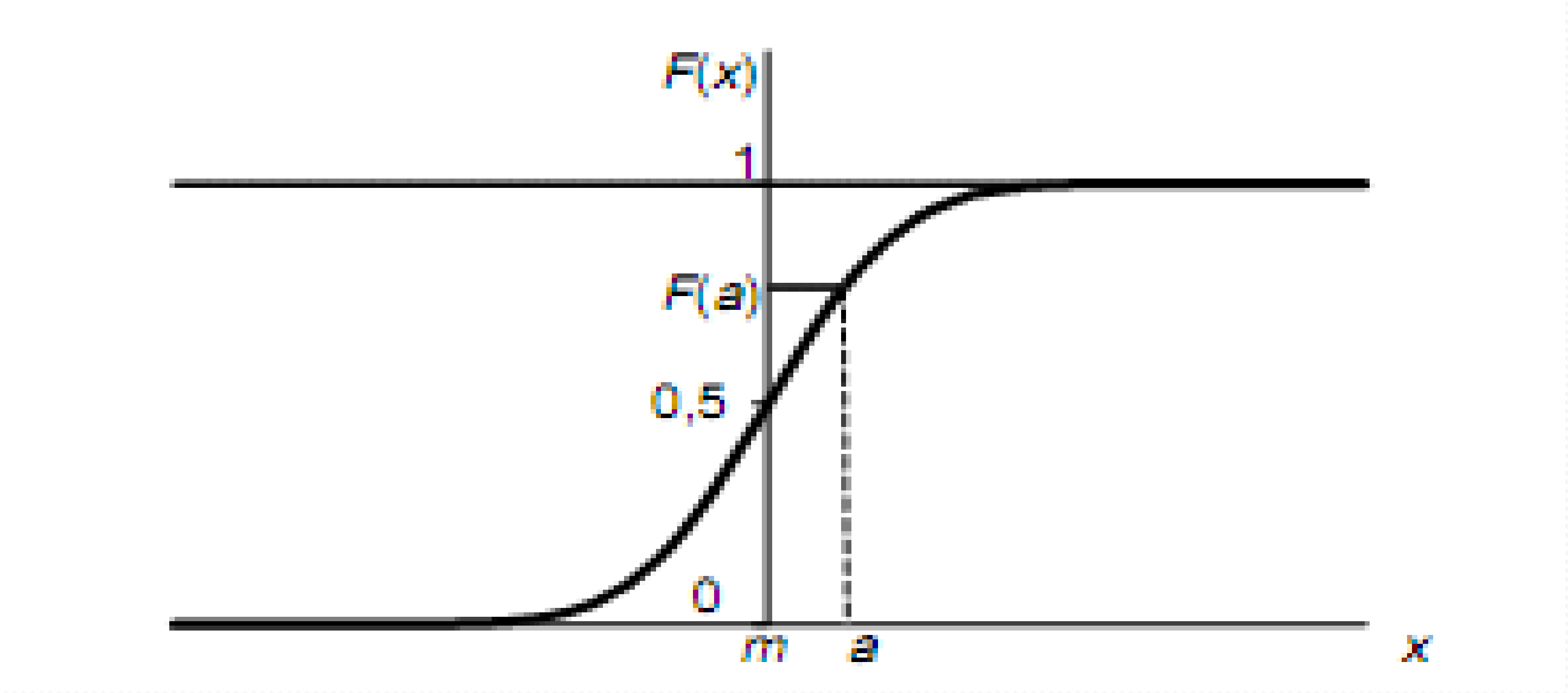
Variance de X

- δ²



Loi normale

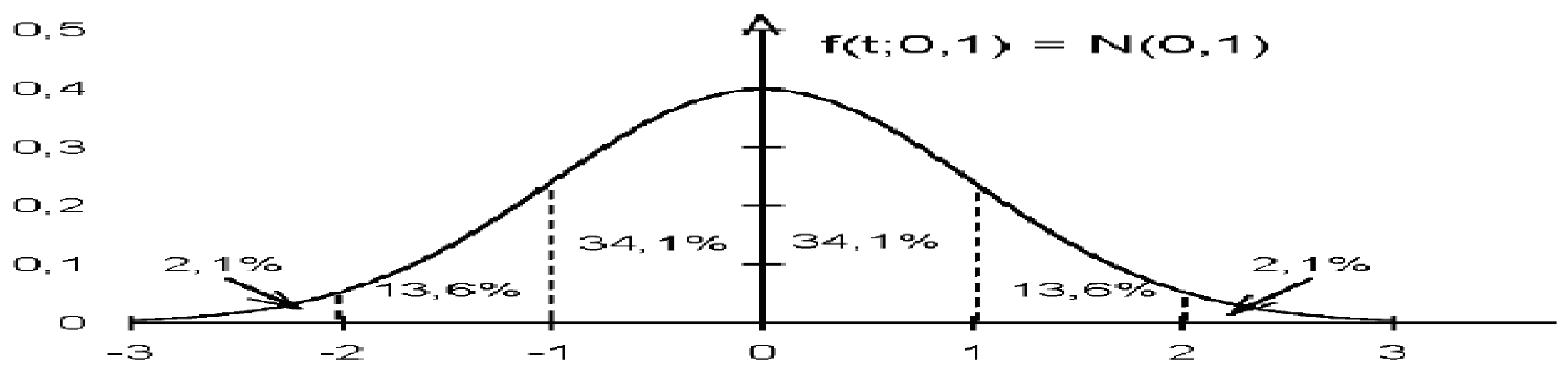
- courbe fonction de répartition de loi normale N(μ, σ^2)



la distribution normale centrée réduite

la distribution est centrée si son espérance μ est nulle ; elle est dite réduite si sa variance σ2 (et son écart-type σ) est égale à 1. La variable centrée réduite associée à v.a. X, est la variable : **$t = (X - \mu)/\sigma$**

La distribution normale centrée réduite N(0; 1) est donc définie par la formule : f(t; 0,1) =1 /(√2π) *$e^{-1/2*t^2}$



Loi normale

Centrée réduite

TABLE 5-1 — **FONCTION de REPARTITION de la LOI NORMALE REDUITE**

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,10	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,20	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,30	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,40	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,50	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,60	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,70	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,80	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,90	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,00	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,10	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,20	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,30	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,40	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,50	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,60	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,70	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,80	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,90	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,00	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,10	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738

exemple : $P(U \leq 1{,}55) = 0{,}9394$

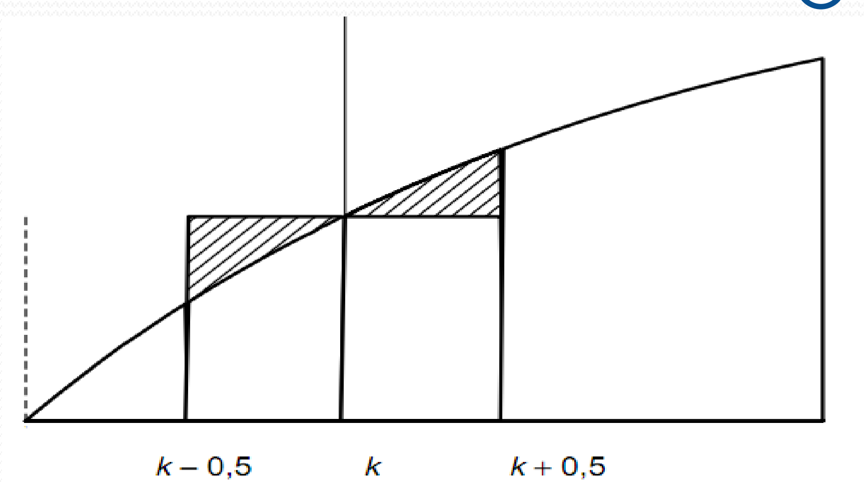
on confond < et ≤

Pour les valeurs de u< 0, on utilise la propriété $F(u) = 1 - F(-u)$.

Exemple $P(U \leq -1{,}55) = 1 - P(U \leq 1{,}55) = 1 - 0{,}9394 = 0{,}0606$

La binomiale & la loi normale

- si n est grand, et si $n\Pi$ et $n(1-\Pi)$ sont ≥ 5
- alors on constate que la distribution binomiale tend vers la distribution normale
- de moyenne $\mathbf{n\Pi}$ et de variance $\mathbf{n\Pi(1-\Pi)}$;
- $K \sim B(n, \Pi)$ et $X \sim N(\mu = n\Pi, \sigma 2 = n\Pi(1-\Pi))$,on a :
- $P(K = k) = P(k) = P(k- 0.5 \leq K \leq k + 0.5) \approx P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$



K Loi binomiale discrète sur [0,n](diagramme en bâton) vers X loi normale continue (courbe en cloche)=> correction de continuité

Dans d'autre ouvrages supérieur à18

La loi de poisson &la Loi normale

- **Approximation de la loi de Poisson par la loi normale** :
- Lorsque λ est grand (en pratique supérieur à 25), une loi de Poisson peut être approchée par une loi normale d'espérance λ et de variance λ.
- **Domaine d'utilisation :**
- Elle représente la loi de distribution d'une variable aléatoire X dépendant d'un grand nombre de facteurs agissant sous forme additive, chacun ayant une variance faible par rapport à la variance résultante.
- Exemple: fin de vie des dispositifs subissant un phénomène de vieillissement, usure, corrosion…

Exemple3

- Soit X,v.a suit $N(3;2)$.calculer :
- $P(X<4)$, $P(X<-1)$, $P(X>1)$
- $P(X<a_1)=0.75$, $P(X>a_2)=0.85$
- on utilise la variable centrée réduite $U=(X-3)/2 \Rightarrow X=2U+3$
- $P(X<4)=P(2U+3<4)=P(U<0.5)=0.6915$
- $P(X<-1)=P(2U+3<-1)=P(U<-2)=1-P(U<2)=0.0228$
- $P(X>1)=P(2U+3>1)=P(U>-1)=1-P(U<-1)=P(U<1)=0.8413$

Caractéristique de la courbe de la loi normale

V.s quantile dans la statistique

Notion de Fractile

- Le fractile d'ordre q(0< q<1) de la loi de X est le nombre x_q tel que:
- $P(X< x_q)= q$, si q=1/2 alors x_q est la médiane

TABLE 5-2	FRACTILE de la LOI NORMALE REDUITE											
P	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	0,99
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0748	2,0537	0,98
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	0,97
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	0,96
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	0,95
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	0,94
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	0,93
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	0,92
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	0,91
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	0,90
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	0,89
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	0,88
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	0,87
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	0,86
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0451	1,0407	1,0364	0,85
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	0,84
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	0,83
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	0,82
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	0,81
0,19	0,8779	0,8742	0,8706	0,8669	0,8632	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	0,80
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	0,79
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	0,78
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	0,77
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	0,76
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	0,75
	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	P

$P(U<u_q)=F(u_q)=q$; si $q\leq 0.50$ on utilise la colonne gauche et la ligne supérieur $P(U<0.6967)=0.243$.

Sinon on utilise la colonne droite et la ligne inférieur $P(U<1.2930)=0.902$

Exemple2-suite-

- $P(X<a_1)=P(2U+3<a_1)=P(U<(a_1-3)/2\ )=0.75 \Rightarrow$
- $U<0.6457$
- Si on pose $(a_1-3)/2=0.6745 \Rightarrow a_1=(0.6745*2)+3=4.35$
- $P(X>a_2)=P(2U+3>a_2)=P(U>(a_2-3)/2\ )=0.85$
- $P(U>(a_2-3)/2\ )=1-P(U<-(a_2-3)/2\ )$
- $P(U<-(a_2-3)/2\ )=1-0.85=0.15 \Rightarrow -(a_2-3)/2=1.0364 \Rightarrow$
- $a_2=-1.0364*2+ 3=0.9272$

Loi de χ^2(Chi-2)

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires **indépendantes**, chacune étant distribuée selon une loi normale centrée réduite :
- $\forall \ i, X_i \sim N(0,1)$

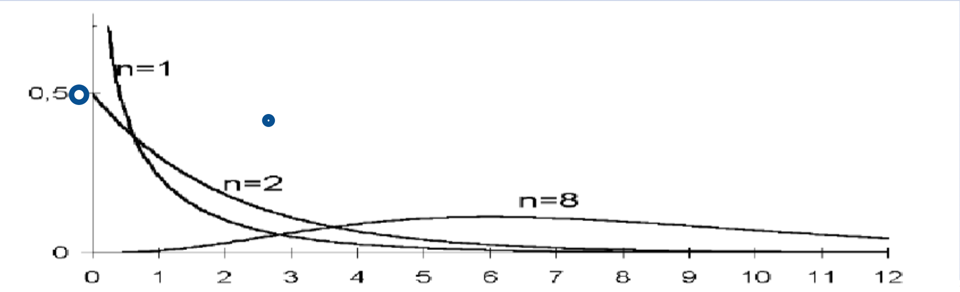
La Loi de probabilité (Fonction de densité)

- La distribution de $S = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ (somme des carrés des Xi) est appelée loi de χ^2 à n degrés de liberté, que l'on note $\chi^2(n)$ où n est le nombre de d. d. l.(de degrés de libertés), seul paramètre de la loi. (loi de densité difficile à retenir)

Non symétrique

Espérance de X

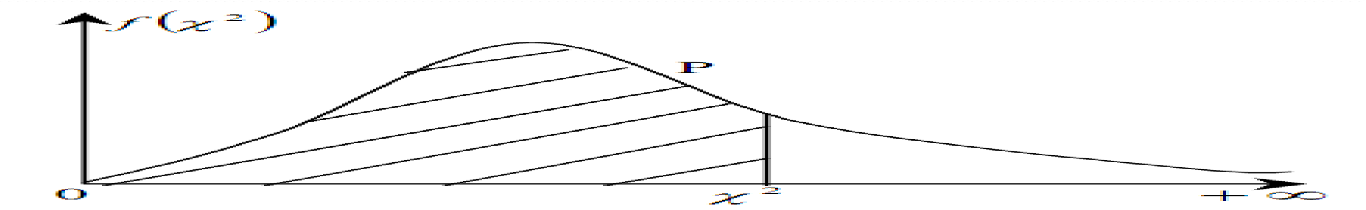
- **$\mu = n$**



Variance de X

- $\delta^2 = 2n$

table de fractile de la loi de χ2



ddl/P	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%	10,0%	50,0%	90,0%	95,0%	97,5%	99,0%	99,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796

Valeurs de χ2 ayant la probabilité P d'être dépasser

$P(\chi2(15) < 25{,}0) = 0{,}95$.

Loi de Student

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

- On considère une première variable aléatoire X, distribuée selon une loi normale centrée réduite, puis une seconde variable Y, indépendante de X, distribuée selon un χ^2 à n degrés de liberté.
- La variable aléatoire Tn est distribuée selon une loi de **Student** à n degrés de liberté, notée T(n) : $T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$

La Loi de probabilité

(Fonction de densité)

- Muni d'une fonction de densité compliquée(voir p204 de la référence principale)

Espérance de X

- **μ= 0**
- La courbe correspondante est symétrique autour de 0, et

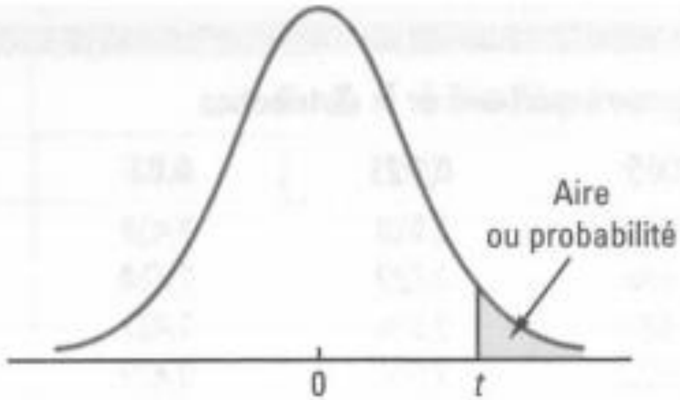
son allure est proche de celle de la loi normale.

pour n > 30(dans certains ouvrage 100), la variance peut être prise égale à 1, et la distribution assimilée à celle d'une loi normale centrée réduite.

Variance de X

- δ^2 =n/(n-2)
- Cette loi est centrée, mais non réduite : la variance n/(n-2) est supérieure à 1.

Table 4: Loi du *t* de Student



Les chiffres de la table correspondent aux valeurs *t* pour différentes aires ou probabilités situées dans la queue supérieure de la distribution de Student. Par exemple, avec 10 degrés de liberté et une aire de 0,05 dans la queue supérieure de la distribution, $t_{0,05}$ = 1,812. (pour test unilatéral !)

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,372	$\boxed{1,812}$	2,228	2,764	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055

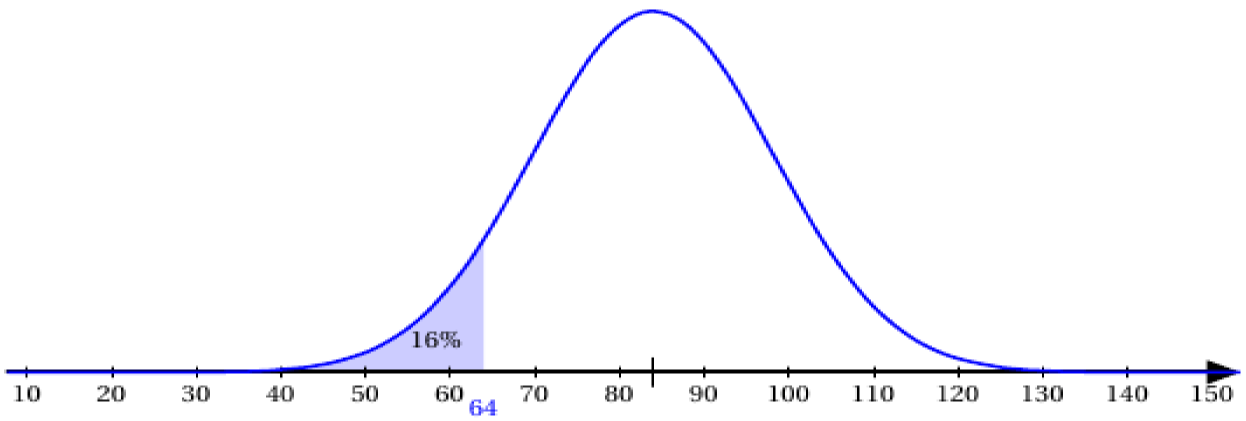
- D’autre loi existent :
- Géométrique
- exponentiel
- Gumbel
- Loi uniforme
- …

exercice2

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle

par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

   b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

   b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

   c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

Références

- Renée Veysseure, ‘aide –mémoire : Statistique et probabilités pour l’ingénieur’, édition DUNOD 2014
- Gilbert Saporta,’Probabilités et analyse de données et satatistique’,edition Technip 2011