Probabilités & Statistiques rappel: le dénombrement & probabilités

Pour les 3ieme License en informatique
Université Badji-Mokhtar Annaba
Par Bensalem Hana

les dénombrements(1)

Dénombrement

calcul du cardinal d'ensembles finis.

Exemple : E={1,2,3,4,5,6}/∀e∈E, Card(E)=6
Soit A={∀e∈E et e est pairs}={2,4,6};
B={∀e∈E et e est impairs}={1,3,5}

Caractéristique de ces ensemble s

$\overline{A} = B$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = E$.

L'analyse combinatoire est le **dénombrement** des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

Permutation

123, 132, 213, 231, 312, 321

- nombre de suites **ordonnées** de n éléments **distincts**, $\forall n \in N$
- $n\,! = n*(n-1)*(n-2)..*1$ / $0\,! = 1$

E={1,2,3,4},
l'arrangement de 3élements parmi 4 ={123, 124, 132, 134, 142, 143,213 , 214,..,312,..,412,..}
=> $A^4_3 = 4\,!/(4-3)\,! = 4\,! = 4*3*2*1 = 24$

Arrangement

- nombre des suites ordonnées de k éléments **choisis parmi** n
  - **avec répétition** : $R^k_n = n^k$
  - **sans répétition** : $A^n_k = n\,!/(n-k)\,!$ $/ k <= n$

E={1,2,3,4},
Les combinaison à3 éléments de 4
(1 ,2,3),(1,2,4),(2,3,4), (1,3,4)
$C^3_4 = 4\,!/((4-3)\,!*3\,!) = 4$

Combinaison

(coefficient binomial)

- nombre de **sous-ensembles** à k éléments parmi n,
- $C^k_n = n\,!/((n-k)\,!\,k\,!)$ $/ k \leq n$
- **Règle de pascal (triangle de pascal)** :l'une des propriétés de combinaison (sans répétition) est,
- $\forall n,k \in N$ avec $k<=n$, $C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1}$

Conclure et généraliser des fonctions ou lois à partir de faits incomplets

Probabilités

- **Définition** : les **probabilités** sont la modélisation de phénomènes aléatoire, souvent utilisé pour extrapoler.
-
- **Expérience aléatoire :** les expériences avec résultat non prévisible.
- **L'ensemble fondamentale :** Pour une expérience aléatoire donnée, c'est l'ensemble des résultats possibles noté Ω .
- Jet d'une pièce à pile ou face : $\Omega = \{P, F\}$.
- Jet d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- **L'événement** : L'événement A, est un sous ensemble des résultats . On appelle événement tout sous-ensemble de Ω.

- Exemple :Soit l'événement A = "le résultat du jet de dé ayant un nombre pair supérieur ou égal à 3":A={3,4,6}

- si card(A)=1 , A est appelé ***évènement élémentaire ,****noté habituellement* ω_i .

- ***L'événement impossible*** n'est jamais réalisé=∅, ensemble vide des événements.

- Ω représente ***l'événement certain***.

Opérations sur les événements

- Soit A,B deux événements.

Notation	interprétation
$A \cap B$	A et B sont réalisés
$A \cup B$	A ou B est réalisé.
A^c ,C_A, $\bar{A}$	complémentaires de A dans Ω ou événement contraire « non A »
$A \subset B$	la réalisation de A implique la réalisation de B.
$A\text{-}B = A \cap \bar{B}$	A est réalisé et B n'est pas réalisé.
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont **disjoints** et ne peuvent se produire en même temps

Partition

- les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une famille complète si les A_i constituent une **partition de Ω**:
- 1. les événements sont deux à deux disjoints : $\forall (i \neq j), (A_i \cap A_j = \emptyset)$
- 2. ils couvrent tout l'espace : $\bigcup_i A_i = \Omega$

Espace probabilisable fini

(Modélisation d'une expérience aléatoire)

- A toute expérience aléatoire on associe un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ constitué de :
- -un ensemble Ω l'univers de l'expérience, un ensemble $\mathscr{T}$ des événements
- Si Ω est un ensemble fini ou dénombrable on peut toujours prendre $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

probabilité

- une probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ est une application qui vérifie :
- $P : \mathscr{T} \rightarrow [0,1]$
- $P(\Omega) = 1$
- On parle en général de **loi de probabilité** pour designer une fonction P

Espace probabilisé

- soit $I \subset N$ alors pour toute suite d'événements $\{A_n | n \in I\} \subset \mathscr{T}$ disjoints deux à deux : $(\forall i,j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j)$
- on a : $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Équiprobabilité

- Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé / $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ un ensemble fini et $card(\Omega) = n$, P est l'équiprobabilité sur Ω sissi : $\forall k = 1, \ldots, n$, $P(\{\omega_k\}) = 1/n$
- il y a équiprobabilité entre $A_1, \ldots, A_n$ s'ils forment une partition de Ω et que: $P(A_1) = P(A_2) = \ldots$
- Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé ou P est l'équiprobabilité sur Ωalors : $\forall A \subset T$,
- $P(A) = Card(A)/Card(\Omega)$

Propriétés

Issue du théorème de KOLMOGOROV

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$ (appelé modèle fondamentale)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

A=‘ avoir un nombre pair dans le 1ier jet ‘
B=‘avoir un nombre impair dans le 2nd jet’ .A ∩B le nouveau événement≠∅

Probabilité composées

- Le principe des probabilités composées découle des axiomes et des définitions :
- **P (A ∩ B)= P (A/B) P (B)= P (B/A) P (A)**

Le calcule des probabilités , sans le fait : la réalisation de B

Probabilités conditionnelles

- La probabilité conditionnelle de A, sachant que l’événement B est réalisé, est notée P(A/B) et est définie par la relation suivante : **P(A|B)=P(A∩B)/P(B)**
- Dans le cas où Ω est un espace **équiprobable**.: P(A∩B)=card(A∩B)/card(Ω),P(B)=card(B)/card(Ω) =>**p(A|B)=card(A∩B)/card(B)**

Appelée règle des conditionnements successifs

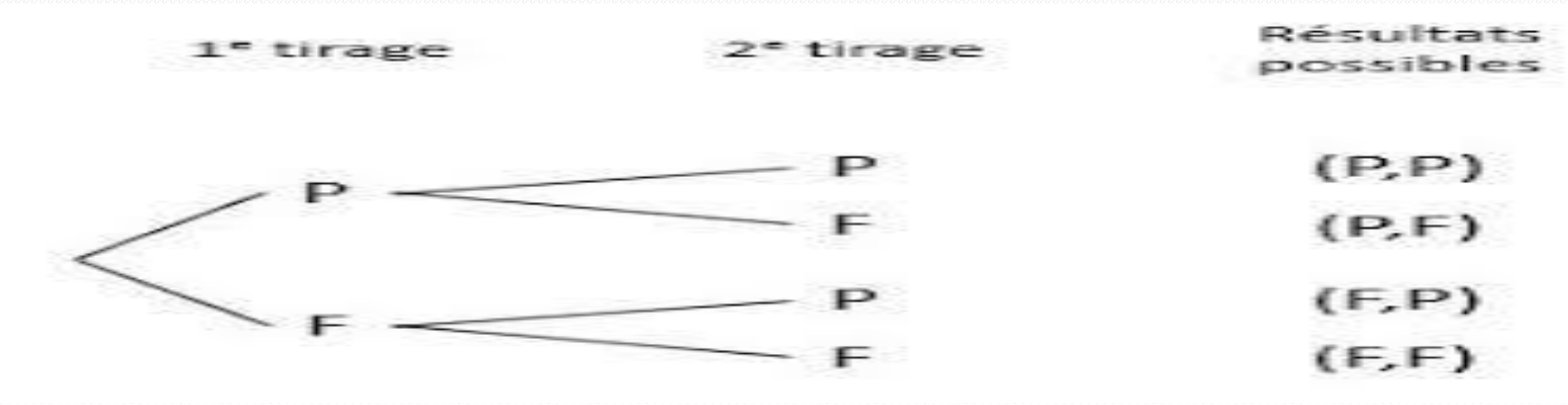
$$P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \cdots \times \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$$

Théorème de la multiplication

- P(A ∩ B) = P(A|B) P(B) = P(B|A) P(A)
- Soient A1, … ,An des événements quelconques d’un espace probabilisé tel que
- P(A1 ∩A2 ∩ …∩ An)≠0
- P(A1 ∩A2 ∩ …∩ An)= P(A1) P(A1|A2)P(A3|(A1 ∩ A2))…P(An|(A1 ∩ …∩ An−1))

Diagramme en arbre

- Si les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience dépendent du résultat de **l'expérience précédente ;** il s'agit de **probabilités conditionnelles**.
- Pour représenter cette séquence, une représentation « **en arbre** », est utilisé.
- le théorème de **multiplication** permet de calculer la probabilité de chaque feuille de l'arbre.



Formule de Bayes

- $P(A|B)=(p(B|A)*P(A))/p(B)$. Déduit du théorème de la multiplication
- Soit les événements $A_1, \ldots, A_n$ tels qu'ils forment une partition de Ω,et B un évènement quelconque.:

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

n'est pas affecté par la réalisation de B.

Indépendance (entre événements)

- A et B sont indépendant si $p(A|B)=p(A)$
- A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$\Omega=A\cup A^c$ et $B\cap\Omega=B$

Probabilité totale

- Soit $A_1,A_2, \ldots A_{n-1},A_n$ une partition de Ω et B un autre événement alors :
- $P(B) = P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)$
- Forme généralisée: $P(B)=\sum_{i\in I} P(B\cap A_i)=\sum_{i\in I} P(A_i)P(B|A_i)$

modélisation

- Modélisation d'une expérience aléatoires simples:
- Définir Ω
- choisir une probabilité sur Ω: il faut donner P(A) pour tout $A \subset \Omega$. Ou alors, définir $P(\omega_i)$ pour tout $\omega_i \in \Omega$.
- Exemple:
- lancer d'un dé équilibré, l'univers des résultats : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Définir une probabilité => donner la valeur de $P(\{k\})$ pour $k = 1,2, \ldots ,6$.
- L'hypothèse du dé équilibré : $\forall k = 1, \ldots ,6, P(\{k\}) = 1/6$
- On peut calculer :
- $A= \{2, 4, 6\} =\Rightarrow P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) =1/2$

Exercice1(dénombrement)

- Soit une urne avec 6boule rouges et 4 boules bleues.
- Expériences :
- a)-tirer 3 boules successive avec remise
- b) tirer 3 boules successive sans remise
- c) tirer 3 boules simultanément sans remise
- Calculer le nombre de résultats possible contenant au moins une boule rouges

Exercice(2)

- l'expérience :
- « tirage de deux boules simultanément parmi 4 boules rouges et 6 bleus »
- calculer la probabilité de l'événement A :« obtenir 2 boules rouges »

Exercice(3)

- lancer d'un dé équilibré:
- Soit A =« les résultats pair », B =« les résultats supérieur ou égal à trois »
- ces événement sont ils indépendants? et calculer leur probabilités
- Soit C =« les résultats strictement supérieur à trois »
- **A et C sont ils indépendants?**

Exercice(4)

- soit l'expérience suivante :« tirer 2 boules successivement et sans remises parmi 4 boules rouges et 6 bleues »

Soit les événements:

- Ri :« obtenir une boule rouge au i ième tirage »
- Bi :« obtenir une boule bleue au i ième tirage »

Calculer les probabilités pour deux tirages.

bibliographie

- Probabilités discrètes et statistique descriptive,DUT Informatique, par Ph.Roux ,Mars 2010
- Aide-mémoire statistique et probabilités pour l'ingénieur, Renée Veysseyre,edition DUNOD 2006.
- Notes de cours probabilités et statistiques - L3 , par Nouaouria Nabila - Université Badji Mokhtar – Département d' Informatique.